Roll No. ....

D–3699

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) यदि G एक समूह है तथा g, G का कोई स्थिर अवयव है, तब सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $T_g : G \to G$ जो :

$$T_g(x) = g\,x\,g^{-1}\ \forall x \in G$$

से परिभाषित है, G का एक स्वाकारिता है।

If G is a group and g is a fixed element of G, then prove that mapping $T_g : G \to G$ defined by :

$$T_g(x) = g\,x\,g^{-1}\ \forall x \in G$$

is an automorphism of G.

(ब) यदि A एवं B एक समूह G के परिमित उपसमूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$o(A\,x\,B) = \frac{o(A)\,o(B)}{o(A \cap x\,B\,x^{-1})}$$

If A and B are finite subgroup of a group G, then show that :

$$o(A\,x\,B) = \frac{o(A)\,o(B)}{o(A \cap x\,B\,x^{-1})}$$

(स) सिलो का प्रथम प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Sylow's first theorem.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि $f : R \to R'$ एक वलय समाकारिता है और यदि R क्रम-विनिमेय वलय है, तो सिद्ध कीजिए कि R' भी क्रमविनिमेय वलय है।

If $f : R \to R'$ is a ring homomorphism and if R is commutative ring, then show that R' is also a commutative ring.

(ब) रिंग (वलय) $(I_6, +_6, \times_6)$ पर निम्नलिखित बहुपदों का योग और गुणन ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

जहाँ $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Find the sum and product of the following polynomials over the ring $(I_6, +_6, \times_6)$:

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

where $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(स) सिद्ध कीजिए कि एक R-मॉड्यूल M के किन्हीं **दो** उपमॉड्यूलों का रैखिक योग भी M का एक उपमॉड्यूल होता है।

Prove that the linear sum of any *two* submodules of an R-module M is also a submodule of M.

इकाई—3

(UNIT—3)

3\. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V (F) की दो उपसमष्टियों W_1 एवं W_2 का सर्वनिष्ठ $W_1 \cap W_2$ भी V (F) की एक उपसमष्टि होता है।

Prove that the intersection of any *two* subspaces W_1 and W_2 of a vector pace V (F) is also a subspace of V(F).

(ब) सदिशों $(1,1,-1), (2,-3,5)$ और $(-2,1,4)$ के $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्रता या परतंत्रता की जाँच कीजिए।

Examine linearly independency or dependency of vectors $(1,1,-1), (2,-3,5)$ and $(-2,1,4)$ in $V_3(R)$.

(स) यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V (F) का एक उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If W is a subspace of a finite dimensional vector space V (F), then prove that :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4\. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $T : V_3(R) \to V_2(R)$ जो $T(a,b,c) = (c, a+b)$ से परिभाषित है, एक रैखिक रूपान्तरण है।

Show that the mapping $T : V_3(R) \to V_2(R)$ defined by $T(a,b,c) = (c, a+b)$ is a linear transformation.

(ब) यदि V_1 और V_2 क्षेत्र F पर सदिश समष्टियाँ हैं तथा रूपान्तरण $T : V_1 \to V_2$ एकैकी आच्छादक रैखिक रूपान्तरण है, तो सिद्ध कीजिए कि $T^{-1} : V_2 \to V_1$ भी एक रैखिक रूपान्तरण होगा।

If V_1 and V_2 be two vector spaces over the field F and if $T : V_1 \to V_2$ is one-one and onto linear transformation, then prove that $T^{-1} : V_2 \to V_1$ is also linear.

(स) दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the following matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि α, β एक आंतर गुणन समष्टि V के सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$$

तथा ज्यामितीय व्याख्या दीजिए।

If α, β are vectors in an inner product space V, prove that :

$$\| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$$

and give geometric interpretation.

(ब) यदि $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ एक आंतर गुणन समष्टि V में शून्येतर सदिशों का एक लांबिक समुच्चय है तथा कोई सदिश $\beta \in V$, S के रैखिकतः विस्तृति में हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta, \alpha_k)}{\| \alpha_k \|^2} \alpha_k$$

If $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ be an orthgonal set of non-zero vectors in an inner product space V and a vector $\beta \in V$ is in the linear span of S, then prove that :

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta, \alpha_k)}{\| \alpha_k \|^2} \alpha_k$$

(स) ग्राम-श्मिट के लांबिक प्रक्रम का प्रयोग करके V_3 (R) के आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ :

$$\beta_1 = (1, 0, 1),\ \beta_2 = (1, 2, -2),\ \beta_3 = (2, -1, 1)$$

Using Gram-Schmidt orthogonalization process find the orthonormal basis from the basis $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of V_3 (R), where :

$$\beta_1 = (1, 0, 1),\ \beta_2 = (1, 2, -2),\ \beta_3 = (2, -1, 1)$$